

151

F

نام :

نام خانوادگی :

محل امضاء :



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.  
امام خمینی (ره)

صبح جمعه

۹۲/۱۲/۱۶

دفترچه شماره (۱)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

**آزمون ورودی**  
**دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل**  
**سال ۱۳۹۳**

**مجموعه مهندسی برق (۶)**  
**زمینه هوش ماشین و رباتیک (کد ۲۳۰۶)**

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (سیستم‌های کنترل خطی - الگوریتم‌های پیشرفته، کنترل مدرن)	۴۵	۱	۴۵

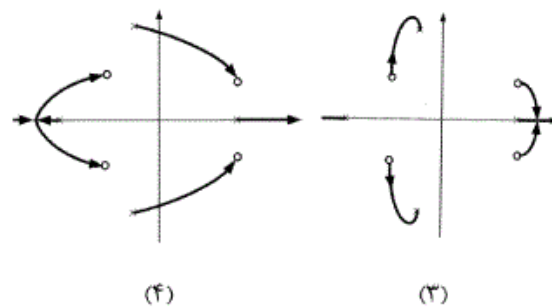
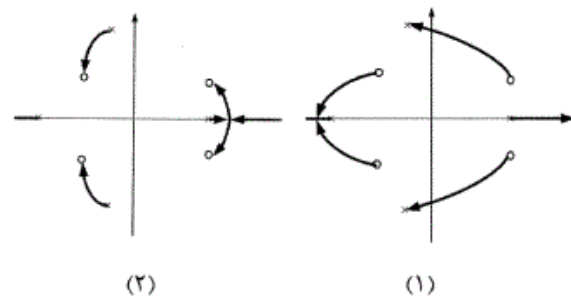
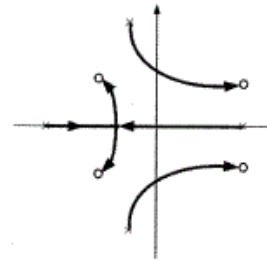
اسفندماه سال ۱۳۹۲

این آزمون نمره منفی دارد.

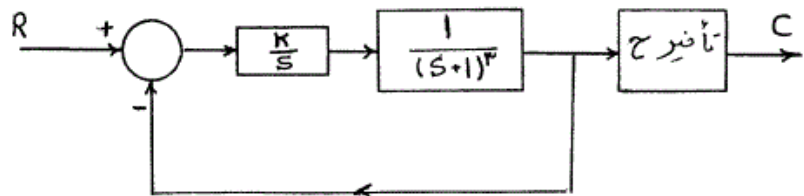
استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱- مکمل مکان ریشه‌های سیستم کنترلی با مکان ریشه نشان داده شده در شکل روبرو کدام است؟ (جهت‌ها نشان دهنده افزایش  $K$  است.)



۲- سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید



در چه محدوده‌ای از  $K$  و  $\tau$  مثبت سیستم فوق پایدار است؟

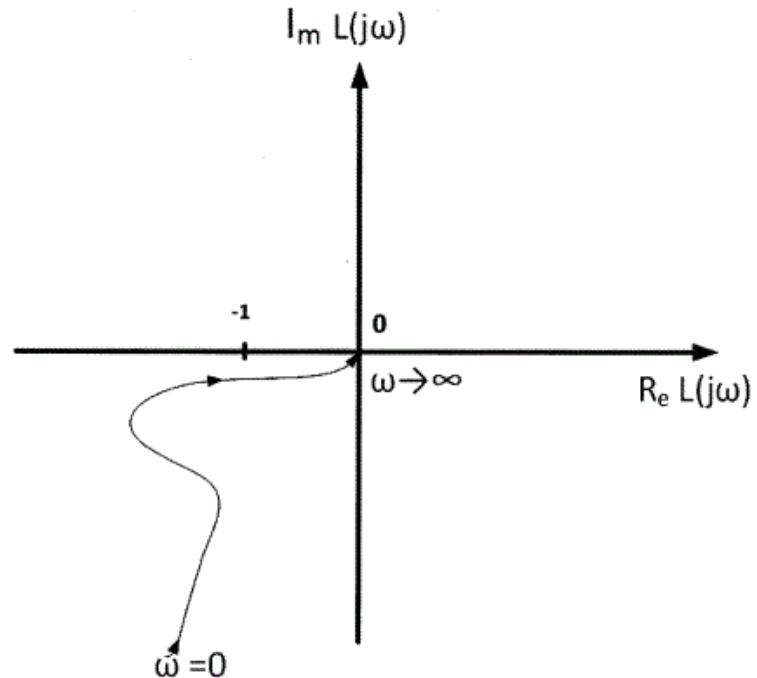
$$(1) \quad K < \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad \frac{1}{3} < K < 1$$

$$(3) \quad \tau < 1, K < \frac{1}{9}$$

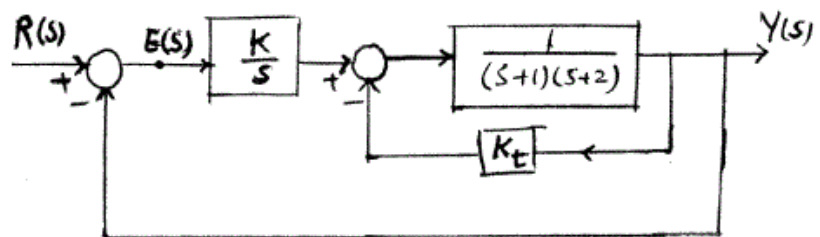
$$(4) \quad \tau < 1, \frac{1}{3} < K < 1$$

۳- دیاگرام قطبی بهره حلقه سیستمی در شکل زیر داده شده است. در مورد پایداری حلقه بسته آن چه می توان گفت ؟ تعداد قطب های در مبدا کمترین مقدار است.



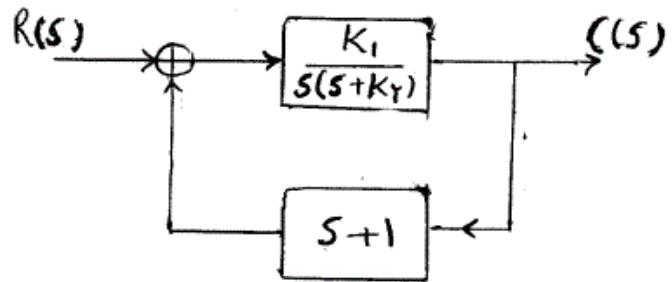
۴- سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید حداقل خطای حالت دائم سیستم به ورودی شیب واحد کدام است؟

- (۱) همیشه پایدار است.
- (۲) اگر  $L(s)$  کمینه فاز باشد همواره پایدار است.
- (۳) اگر  $L(s)$  کمینه فاز باشد همواره ناپایدار است.
- (۴) اگر  $L(s)$  فقط یک قطب ناپایدار داشته باشد همواره پایدار است.



- (۱) ۰
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\infty$
- (۴) به مقادیر  $K$  و  $K_t$  بستگی دارد و قابل محاسبه نیست.

۵- نوع سیستم و خطای حالت دائم به ورودی شیب واحد سیستم زیر در کدام گزینه آمده است؟



۲) و ۰  $e_{ss} = 0$

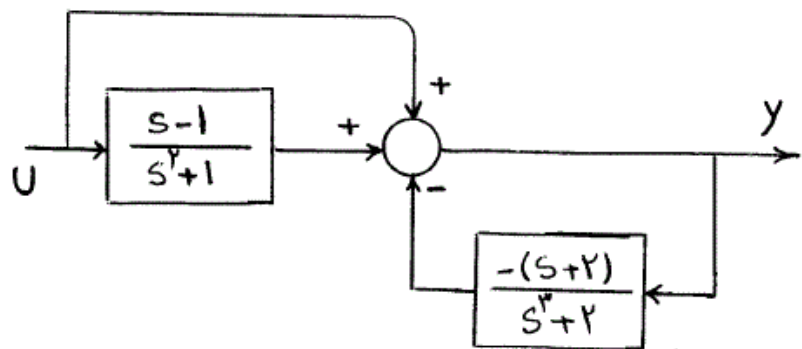
۱) و ۱  $e_{ss} = \frac{1}{K_2}$

۴) و ۱  $e_{ss} = 1 + \frac{K_2}{K_1}$

۳) و ۰  $e_{ss} = \infty$

۶- مدهای پنهان سیستم زیر کدامند؟

(راهنمایی: مد پنهان مقدار ویژه‌ای است که به صورت قطب ظاهر نمی‌شود.)



۲) ۰

۱)  $\pm j, +1$

۴) ۰, +1

۳) ۰, -1

۷- فرض کنید تابع تبدیل یک سیستم سره  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  دو قطب و یک صفر

ناپایدار دارد. تعداد صفر و قطب‌های پایدار این سیستم نامشخص است. سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی و تابع تبدیل مسیر پیشرو  $KG(s)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید منحنی ساده بسته C نیم صفحه سمت راست صفحه مختلط، در جهت عقربه‌های ساعت باشد. اگر تعداد دوران نگاشت منحنی C، تحت ضابطه  $(1+KG)^2$ ، حول مبدأ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت را با x، نشان دهیم:

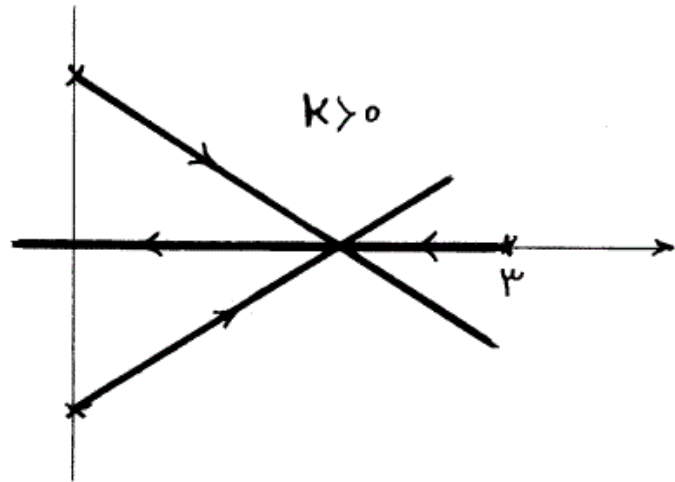
۲)  $\exists a > 0 : K > a \Rightarrow x = 4$

۱)  $\exists a > 0 : K > a \Rightarrow x = 0$

۴)  $\exists a > 0 : K > a \Rightarrow x = 2$

۳)  $\exists a > 0 : 0 < K < a \Rightarrow x = 2$

۸- به ازای چه مقادیری از  $\alpha < 0$  مکان ریشه‌های  $1 + \frac{K}{(s-2)(s^2+\alpha)}$  به صورت مقابل می‌باشد.



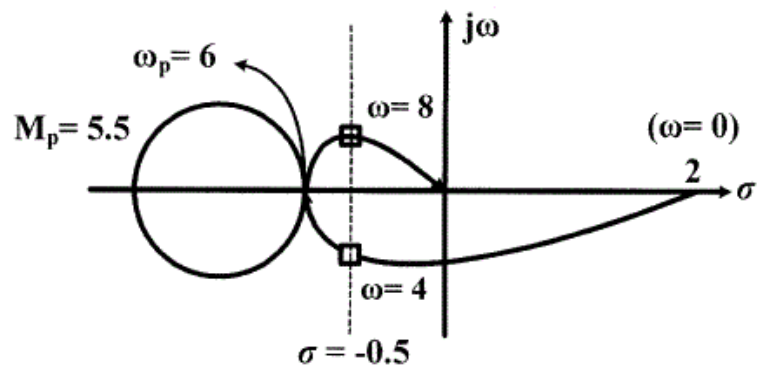
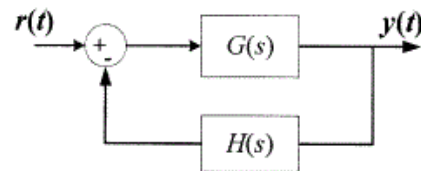
$\alpha = 2$  (۲)

$\alpha = 1/5$  (۱)

$\alpha = 3$  (۴)

$\alpha = 2/5$  (۳)

۹- دیاگرام قطبی (Nyquist) بهره حلقه  $(GH(s))$  سیستمی با بهره فیدبک  $H(s) = 0.5/(s+1)$  به صورت شکل زیر رسم شده است. فرض کنید سیستم حلقه بسته پایدار است. حالت دائمی خروجی سیستم حلقه بسته  $y(t)$  به ازای ورودی پله واحد  $r(t) = u(t)$  و ورودی  $r(t) = \sqrt{17} \sin(4t)$  به ترتیب برابر است با:



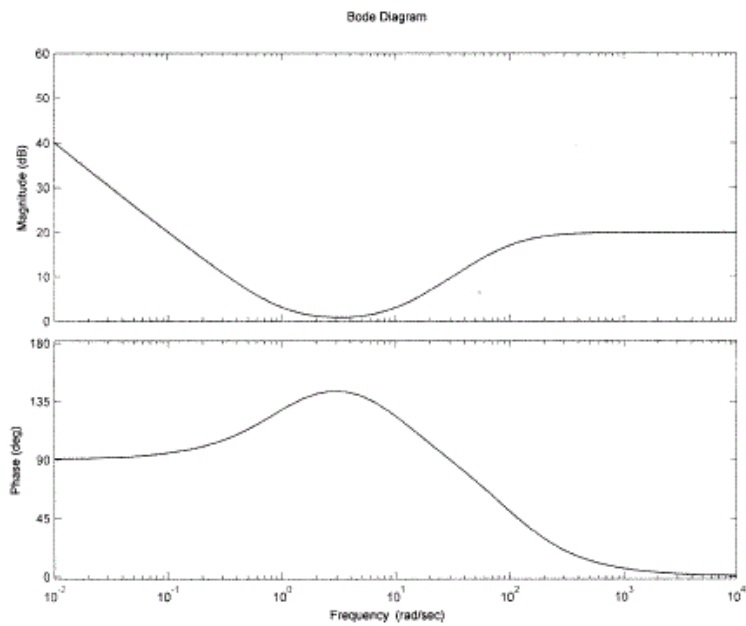
$2, \frac{4}{3}$  (۱)

$\sqrt{17}, \frac{1}{3}$  (۲)

$\sqrt{17}, \frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{1}{5}$  (۴) و به ازای ورودی سینوسی خروجی سیستم بینهایت است.

۱۰- با توجه به منحنی پاسخ فرکانسی اندازه و فاز رسم شده، کدام گزینه در مورد سیستم نادرست است؟

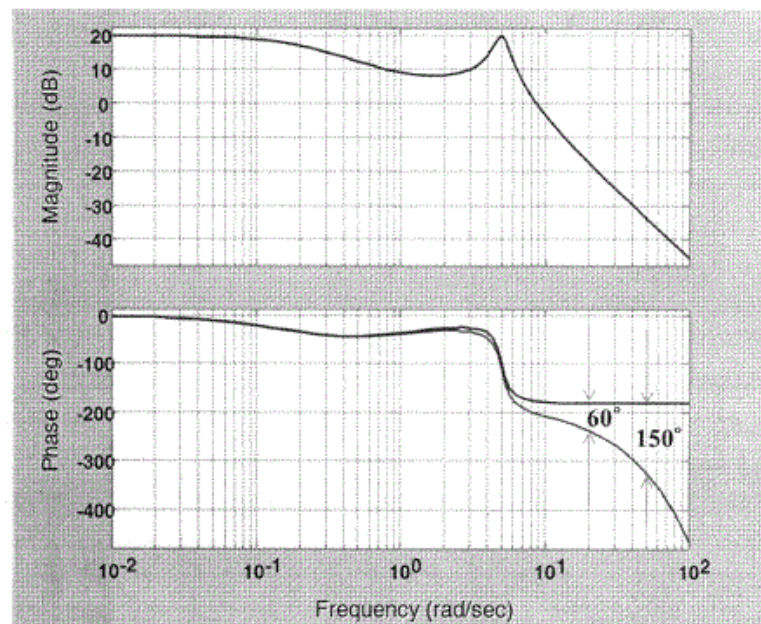


$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 1 \quad (۲)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 10 \quad (۱)$$

(۳) سیستم غیر مینیمم فاز است. (۴) سیستم سره است.

۱۱- نمودار بود لگاریتم اندازه و فاز سیستمی مطابق شکل زیر می باشد. تابع تبدیل شناسایی شده برای سیستم کدام گزینه خواهد بود؟



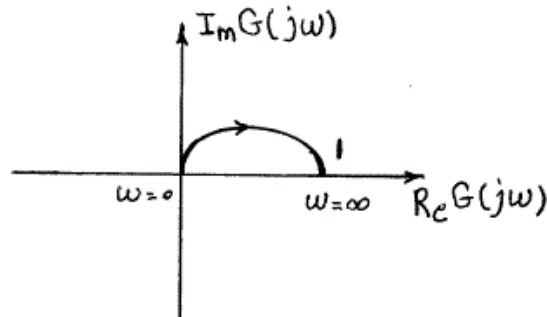
$$\frac{5e^{-s}(s+1)}{(s+0.2)(s^2+s+2.5)} \quad (۲)$$

$$\frac{5e^{-0.5s}(s+1)}{(s+0.2)(s^2+s+2.5)} \quad (۱)$$

$$\frac{5e^{-s}(s-1)}{(s+0.2)(s^2+s+5)} \quad (۴)$$

$$\frac{5e^{-0.5s}(s-1)}{(s+0.2)(s^2+s+2.5)} \quad (۳)$$

۱۲- یک سیستم فیدبک واحد با تابع تبدیل مسیر پیشرو  $G(s)$  را در نظر بگیرید. دیاگرام قطبی  $G(s)$  در شکل زیر نشان داده شده است. مناسب‌ترین کنترل کننده برای تأمین خطای حالت دائم صفر به ورودی پله واحد کدام است؟



- ۱) کنترل کننده P
  - ۲) کنترل کننده PI
  - ۳) کنترل کننده PII (با دو انتگرال گیر)
  - ۴) چنین کنترل کننده‌ای وجود ندارد.
- ۱۳- کدام یک از جملات زیر درست است؟

۱) در طراحی کنترل کننده Lead،  $G_c(s) = \frac{s+z_c}{s+p_c}$ ، هر چقدر نسبت

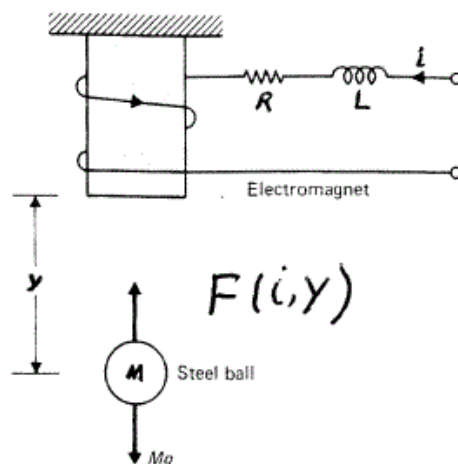
$\frac{z_c}{p_c}$  بزرگتر باشد، خطای حالت دائم سیستم کمتر است.

۲) در طراحی کنترل کننده Lag،  $G_c(s) = \frac{s+z_c}{s+p_c}$ ، اگر  $p_c$  و  $z_c$  خیلی

- ۳) بزرگ انتخاب شوند ثابت خطا بزرگ می‌شود ولی حد فاز عموماً کم می‌شود.
- ۴) در طراحی کنترل کننده Lead حوزه فرکانس، با در نظر گرفتن مقدار بزرگتری ضریب اطمینان ( $\Delta$ ) برای میزان فاز مورد نیاز ( $\phi_m$ ) همواره می‌توان اثر تأخیر فاز ناشی از جابجایی فرکانس گذر بهره ( $\omega_c$ ) را جبران نمود.
- ۴) با توجه به مراحل طراحی کنترل کننده Lead در حوزه فرکانس (تنظیم بهره  $K$ ) همواره می‌توان خطای حالت دائم را با کنترل کننده Lead حوزه فرکانسی تنظیم کرد.

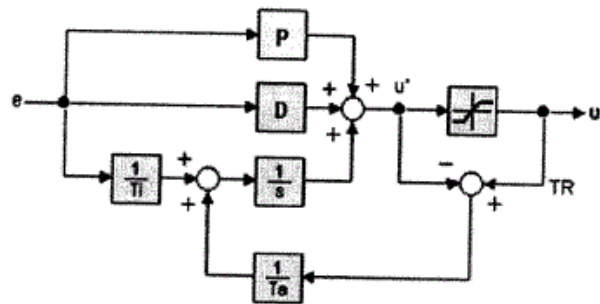
۱۴- سیستم تعلیق مغناطیسی زیر را در نظر بگیرید.

اگر جریان سلف ( $i$ ) به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته شود، کدام گزینه در مورد مشاهده پذیری و پایداری سیستم حلقه باز صحیح است؟



- ۱) مشاهده‌پذیر - پایدار
- ۲) مشاهده‌پذیر - ناپایدار
- ۳) مشاهده‌ناپذیر - پایدار
- ۴) مشاهده‌ناپذیر - ناپایدار

۱۵- شکل زیر تحقق یک PID را نشان می دهد. کدام گزینه صحیح است؟



(۱) افزایش  $T_i$  سبب ناپایداری می شود.

(۲)  $T_a$  بر روی رفتار اشباع عملگر تأثیری ندارد.

(۳) کاهش  $T_a$  سبب کاهش دوره اشباع عملگر و کاهش نوسانات خواهد شد.

(۴) کاهش  $T_a$  سبب افزایش دوره اشباع عملگر و افزایش نوسانات خواهد شد.

۱۶- فرض کنید  $A$  ماتریس حالت یک سیستم خطی ناپایدار و  $Q$  یک ماتریس مثبت معین متقارن است. کدام گزینه نمی تواند پاسخ معادله لیاپانوف

$$A^T P + PA = Q \text{ باشد؟}$$

$$P = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

(۴) هیچ کدام

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0/5 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۱۷- در مورد سیستم زیر کدام مطلب درست است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + Bu, \quad y = Cx$$

(B) ماتریس  $2 \times 7$  و C ماتریس  $3 \times 7$  می باشد.

(۱) سیستم حتماً کنترل ناپذیر است.

(۲) سیستم حتماً رؤیت ناپذیر است.

(۳) با توجه به عناصر ماتریس های B و C، سیستم می تواند کنترل پذیر و رؤیت پذیر باشد.

(۴) به ازاء تمام مقادیر ماتریس های B و C، سیستم نه کنترل پذیر است و نه رؤیت پذیر



-18

کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) تمام تحقق‌های هم درجه (بعد ماتریس حالت) یک تابع تبدیل معادل هستند.
- (۲) تمام تحقق‌های پایدار داخلی یک تابع تبدیل معادل هستند.
- (۳) تمام تحقق‌های کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر یک تابع تبدیل معادل هستند.
- (۴) تمام تحقق‌های دسترس‌پذیر و آشکارپذیر یک تابع تبدیل معادل هستند.

-19

یک سیستم با تحقق  $\left\{ \begin{bmatrix} A_1 & \circ \\ A_3 & A_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}, [C_1 \ C_3], D \right\}$  در نظر

بگیرید.  $A_1$  و  $A_3$  دو ماتریس مربعی و سایر ماتریس‌ها دارای ابعاد مناسب هستند. کدام یک از گزینه‌های زیر معادل (equivalent) تحقق فوق است؟

$$(۱) \left\{ \begin{bmatrix} A_3 & A_3 \\ \circ & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}, [C_1 \ C_3], D \right\}$$

$$(۲) \left\{ \begin{bmatrix} A_3 & A_3 \\ \circ & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}, [C_3 \ C_1], D \right\}$$

$$(۳) \left\{ \begin{bmatrix} A_3 & A_3 \\ \circ & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_3 \\ B_1 \end{bmatrix}, [C_1 \ C_3], D \right\}$$

$$(۴) \left\{ \begin{bmatrix} A_3 & A_3 \\ \circ & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_3 \\ B_1 \end{bmatrix}, [C_3 \ C_1], D \right\}$$

-20

سیستم خطی، پایدار مجانبی و تغییرناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

$$x(0) = x_0$$

اگر:  $\int_0^{\infty} (y^T M y) dt = x_0^T P x_0$  باشد، کدام عبارت در مورد ماتریس  $P$  صحیح

است؟

(۱) به ازای هر  $M, P$  پاسخ یکتای معادله لیاپانوف  $A^T P + PA - C^T M C = \circ$  است.

(۲) اگر  $M$  مثبت معین باشد،  $P$  پاسخ یکتای معادله‌ی لیاپانوف

$$A^T P + PA - C^T M C = \circ$$

(۳) به ازای هر  $M, P$  پاسخ یکتای معادله لیاپانوف  $A^T P + PA + C^T M C = \circ$  است.

(۴) اگر  $M$  مثبت معین باشد،  $P$  پاسخ یکتای معادله‌ی لیاپانوف

$$A^T P + PA + C^T M C = \circ$$

۲۱- در مورد سیستم‌های زیر کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ب}) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{الف})$$

- (۱) حالت‌های سیستم‌های الف و ب هیچ‌کدام محدود نیستند.  
 (۲) حالت‌های سیستم الف محدود نیست ولی حالت‌های سیستم ب، محدود هستند.  
 (۳) حالت‌های سیستم‌های الف و ب هر دو محدود هستند.  
 (۴) حالت‌های سیستم الف محدود است ولی حالت‌های سیستم ب محدود نیستند.

۲۲- کدام گزینه در مورد پایداری سیستم زیر نادرست است؟

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$$

- (۱) به دلیل وجود دو قطب در مبدأ، سیستم پایدار BIBO نیست.  
 (۲) نقطه تعادل بدون تحریک  $(0, 2, 1)$  به مفهوم لیاپانوف، پایدار است.  
 (۳) نقطه تعادل بدون تحریک  $(0, 3, 1)$  پایدار مجانبی نیست.  
 (۴) معادله لیاپانوف  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$  به ازای هر ماتریس مثبت معین  $\mathbf{Q}$ ، فاقد جواب مثبت معین است.

۲۳- سیستم زیر را با فضای حالت  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$  محقق نموده‌ایم. کدام تحقق

برای این سیستم برقرار است؟

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s + 1}$$

(۱)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $C = [0 \ 0 \ 1]$

(۲)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $C = [0 \ 0 \ 1]$

(۳)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $C = [0 \ 0 \ 1]$

(۴)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $C = [0 \ 0 \ 1]$

۲۴- پاسخ سیستم  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x$  به شرط اولیه  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  با پاسخ کدام

یک از سیستم‌های زیر به ورودی  $u(t) = [4\delta(t) \ 2\delta(t)]^T$  برابر است؟

(۱)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix} u$

(۲)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u$

(۳)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$

(۴)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u$

-۲۵

سیستم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \left( -x_1 + \frac{u}{1+x_2} \right) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-x_2 + u)\end{aligned}$$

با فرض این که  $u > 0$  و ثابت می باشد کدام یک از ماتریس های زیر نمی تواند به عنوان ماتریس  $A$  در مدل خطی شده  $\dot{x} = Ax + Bu$  حول نقطه تعادل سیستم مطرح باشند؟

$$A = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \quad (۲) \qquad A = \begin{bmatrix} u & -u^2 \\ 0 & u \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{u}{1+u} & -\frac{u^2}{(1+u)^2} \\ 0 & -u \end{bmatrix} \quad (۴) \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{u}{1+u} & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix} \quad (۳)$$

-۲۶ همانگونه که می دانید برای تعیین ماتریس انتقال حالت می توان از روش کیلی - همیلتون استفاده نمود. در این روش رابطه زیر برقرار است.

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

که ضرایب  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  را می توان از قضیه کیلی - همیلتون بدست آورد. مقادیر ضریب  $\alpha_0$  برای ماتریس زیر کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} \quad (۲) \qquad \alpha_0 = 3e^{-t} - 3e^{-2t} - e^{-3t} \quad (۱)$$

$$\alpha_0 = e^{-t} + e^{-2t} - 3e^{-3t} \quad (۴) \qquad \alpha_0 = e^{-t} - e^{-2t} + 3e^{-3t} \quad (۳)$$

-۲۷ یک سیستم چند متغیره با تابع تبدیل مربعی  $G(s)$  و تحقق  $\{A, B, C, D\}$  را در

نظر بگیرید. کدام یک از گزینه های زیر یک تحقق  $G^{-1}(s)$  (معکوس  $G(s)$ ) است؟

$$\{A + BD^{-1}C, -BD^{-1}, D^{-1}C, D^{-1}\} \quad (۱)$$

$$\{A - BD^{-1}C, BD^{-1}, -D^{-1}C, D^{-1}\} \quad (۲)$$

$$\{D^{-1} + CA^{-1}B, -D^{-1}C, BD^{-1}, D^{-1}\} \quad (۳)$$

$$\{D^{-1} - CA^{-1}B, D^{-1}C, -BD^{-1}, D^{-1}\} \quad (۴)$$

۲۸- معادلات حالت مینیمال  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$  با مقادیر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

به  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ،  $C = [1 \quad -1]$  و فیدبک حالت  $u = -kx + r$  را در نظر بگیرید. به

ازای کدام یک از ماتریس‌های فیدبک حالت زیر، سیستم حلقه بسته رویت‌ناپذیر است؟

(۱)  $k = [a \quad 2-a]$  (برای تمام مقادیر  $a$ )

(۲)  $k = [a \quad 1+2a]$  (برای تمام مقادیر  $a$ )

(۳)  $k = \left[ a \quad \frac{1}{2} - a \right]$  (برای تمام مقادیر  $a$ )

(۴) به ازای تمام مقادیر  $k$ ، سیستم حلقه بسته رویت‌پذیر است.

۲۹- با داشتن ماتریس  $A$  به صورت  $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ ،  $\sin(A)$  برابر کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{8} & -1 \end{bmatrix}$

(۲)  $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}(\pi-4)}{8} \end{bmatrix}$

(۳)  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(\pi-4)}{8} & -\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{8} & -\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8} \end{bmatrix}$

(۴)  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix}$

۳۰- سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$\dot{x} = Ax + Bu$  ,  $A \in \mathbb{R}^n$  ,  $n > 1$

می‌دانیم یکی از مقادیر ویژه ماتریس  $A$  دارای مقدار حقیقی مثبت است. کدام یک از

جملات زیر درست نیست؟

(۱) ماتریس انتقال حالت سیستم نامحدود است.

(۲) پاسخ ورودی صفر سیستم لزوماً نامحدود است.

(۳) با تعریف مناسب خروجی، سیستم می‌تواند پایدار BIBO باشد.

(۴) پاسخ حالت صفر سیستم به تمام ورودی‌های محدود، لزوماً نامحدود است.

۳۱- چه تعداد درخت دودویی با  $n$  گره و با برجسب‌های ۱ تا  $n$  دارای ترتیب‌های یک‌سان در هر دو روش پس‌ترتیب و میان‌ترتیب هستند؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $n$  (۴)  $n!$

۳۲- یک الگوریتم مرتب‌سازی مبتنی بر مقایسه که  $n$  عدد ورودی را مرتب می‌کند در نظر بگیرید. به ازای چه کسری از  $n!$  جایگشت اعداد ورودی ممکن است تعداد مقایسه‌ها  $cn$  شود که  $c$  یک عدد ثابت است.

- (۱)  $1/c$  (۲)  $1/n$  (۳)  $1/2^n$  (۴) هیچکدام

۳۳- آرایه‌ی  $1 + 4n$  عضوی  $A$  با عناصر متمایز داده شده است. فرض کنید میانه‌ی  $A$  برابر  $x$  است. چند زیرآرایه‌ی  $A$  با  $1 + 2n$  عنصر با میانه‌ی  $x$  وجود دارد و با چه مرتبه‌ی زمانی می‌توان یکی از آن‌ها را به‌دست آورد؟

- (۱) تعداد:  $\binom{2n}{n}^2$  و مرتبه:  $O(n)$  (۲) تعداد:  $\binom{2n}{n}^2$  و مرتبه:  $O(n \log n)$   
 (۳) تعداد:  $\binom{n}{n/2}^2$  و مرتبه:  $O(n)$  (۴) تعداد:  $\binom{n}{n/2}^2$  و مرتبه:  $O(n \log n)$

۳۴- دو آرایه‌ی  $n$  تایی  $A$  و  $B$  حاوی اعداد حقیقی و یک عدد  $M$  داده شده‌اند. می‌خواهیم دو عدد  $i$  و  $j$  را در صورت وجود  $(1 \leq i, j \leq n)$  پیدا کنیم طوری که  $A[i] + B[j] = M$ . بهترین الگوریتم برای این مسئله از چه مرتبه‌ای است؟

- (۱)  $O(n)$  (۲)  $O(n \lg n)$  (۳)  $\Omega(n^2)$  (۴)  $O(n^2)$

۳۵- در ساعت صفر، ۱۰ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ برای پر کردن سطل خود در مقابل یک شیر آب صف کشیده‌اند. به‌محض این که سطل فردی که در جلوی شیر آب است پر می‌شود، او کنار می‌رود و نفر بعدی در صف جای او را می‌گیرد. فرض کنید سطل نفر  $i$ ام به اندازه‌ای است که پر کردن آن  $i$  دقیقه طول می‌کشد. زمانی که نفر  $i$ ام سطل خود را کاملاً پر می‌کند را «زمان معطلی» نفر  $i$ ام می‌نامیم. نحوه‌ی قرارگرفتن افراد در صف ابتدایی مجموع زمان معطلی را تعیین می‌کند. کمینه‌ی مجموع زمان معطلی این ۱۰ نفر چند است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۱۱۰ (۳) ۲۲۰ (۴) ۳۰۲

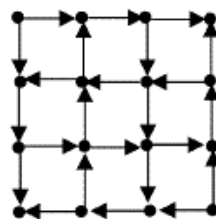
۳۶-  $n$  بازه‌ی  $[l_i, u_i]$  برای  $i = 1..n$  داده شده‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای از بازه‌های دوبه‌دو ناهم‌پوشان را با بیش‌ترین مجموع طول پیدا کنیم. برای این کار الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم.

هر بار یکی از بازه‌ها را طبق یک ترتیب مشخص انتخاب کن، بازه‌هایی را که با این بازه هم‌پوشانی دارند حذف و این کار را تکرار کن.

این الگوریتم برای کدام‌یک از ترتیب‌های زیر همیشه درست کار می‌کند؟

- (۱) به‌ترتیب  $l_i$ ها (۲) به‌ترتیب  $u_i$ ها  
 (۳) به‌ترتیب طول بازه‌ها (۴) هیچ‌کدام از ترتیب‌های بالا درست نیست.

۳۷- تعداد اجزای قویا هم‌بند گراف زیر چند تاست؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۸- چند تا از گزاره‌های زیر درست‌اند؟

- اگر مسئله‌ای در  $P$  باشد حتماً در  $NP$  هم هست.
- اگر مسئله‌ای در  $NP$  باشد حتماً در  $P$  هم هست.
- اگر مسئله‌ای  $NP$ -کامل باشد حتماً در  $NP$  هم هست.
- مسئله‌ی «باداشتن گراف  $G$ ، آیا  $G$  یک پوشش رأسی با اندازه‌ی حداکثر ۵ دارد؟»  $NP$ -کامل است.
- هر مسئله‌ی  $NP$ -سخت  $NP$ -کامل هم هست.

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۹- در گراف همبند، مسطح و بدون جهت  $G$  با وزن‌های مثبت کدام یک از الگوریتم‌های زیر کوتاه‌ترین مسیر بین تمام رأس‌ها (All Pairs Shortest Paths) را سریع‌تر محاسبه می‌کند؟

- (۱) الگوریتم مبتنی بر الگوریتم دایکسترا
- (۲) الگوریتم فلوید-وارشال
- (۳) الگوریتم مبتنی بر ضرب ماتریس‌ها
- (۴) الگوریتم مبتنی بر بلمن-فورد

۴۰- فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت یک گراف وزن‌دار و جهت‌دار (بدون یال چندگانه و طوقه)  $G$  با  $n$  رأس است که در آن درایه‌ی  $A[i, j]$  برابر وزن یال  $i$  به  $j$  در صورت وجود است؛ اگر این یال موجود نباشد قرار می‌دهیم  $A[i, j] = +\infty$ . در ضمن برای هر  $i$  قرار می‌دهیم  $A[i, i] = 0$ . ماتریس  $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k$  را در

نظر بگیرید. درایه‌ی  $A^k[i, j]$  چه عددی را نشان می‌دهد؟

- (۱) وزن کوتاه‌ترین مسیر از رأس  $i$  به رأس  $j$  که دقیقاً از  $k$  یال عبور کرده باشد.
- (۲) مجموع وزن‌های همه‌ی مسیرهای از رأس  $i$  به رأس  $j$  که دقیقاً از  $k$  یال عبور کرده باشد.
- (۳) وزن کوتاه‌ترین مسیر از رأس  $i$  به رأس  $j$  که حداکثر از  $k$  یال عبور کرده باشد.
- (۴) عددی غیر از گزینه‌های بالا

۴۱- یک الگوریتم تصادفی  $A$  قرار است تعیین کند که آیا یک عدد ورودی  $x$  اول هست یا خیر. می‌دانیم که  $A$  در یک بار اجرا

الف) اگر  $x$  اول باشد، جواب «بله» می‌دهد.

ب) اگر  $x$  اول نباشد، با احتمال  $3/4$  جواب «خیر» می‌دهد.

برای آن که تضمین کنیم که در حالت «ب»  $A$  با احتمال حداقل  $1/k - 1$  جواب «خیر» بدهد، الگوریتم را چند بار باید اجرا کنیم؟ توجه: یک جواب «خیر» در این تکرارها به معنی غیر اول بودن عدد است. (کم‌ترین مقدار درست مورد نظر است.)

(۱)  $k$  (۲)  $O(\lg k)$  (۳)  $O(1)$  (۴)  $O(\sqrt{k})$

۴۲- چندتا از گزاره‌های زیر در مورد شبکه‌ی شار درست است؟

- در هر شار بیشینه یا شار  $u$  به  $v$  و یا شار  $v$  به  $u$  صفر است.
- همیشه یک شار بیشینه هست که در آن شار  $u$  به  $v$  و یا شار  $v$  به  $u$  صفر باشد.
- اگر ظرفیت یال‌ها متمایز باشد، شار بیشینه‌ی (نه مقدار آن) یکتا است.

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

